Ejercicios de Análisis Matemático I
Funciones elementales

1. Estudia cuales de las siguientes igualdades son ciertas y, cuando no lo sean, proporciona un contraejemplo. Se supone que f, g, h son funciones definidas en $\mathbb{R}$.

   a) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.

   b) $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

   c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.

   d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \dfrac{1}{g}$.

2. Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$ e *impar* si $f(-x) = -f(x)$.

   a) Estudia si la suma, el producto y la composición de funciones pares o impares es una función par o impar. Considera todos los casos posibles.

   b) Prueba que toda función puede escribirse de forma única como suma de una función par y una función impar.

3. Sean a, b, c, d números reales y definamos

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

   Estudia condiciones para que la función f sea estrictamente creciente en el intervalo $I = \{x \in \mathbb{R} : cx + d > 0\}$.

4. Prueba que la función $f : [1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.

5. a) Compara[1] $a^{\log b}$ con $b^{\log a}$.

   b) Prueba que $\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.

   c) Resuelve $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

   d) Simplifica las expresiones $a^{\log(\log a)/\log a}$, $\quad \log_a(\log_a(a^{a^x}))$.

6. Calcula x sabiendo que:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}$$

[1] log indica siempre logaritmo natural o neperiano

7. Indica si es correcto escribir:

$$\log(1-x)(x-2) = \log(1-x) + \log(x-2)$$

8. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log \dfrac{x^2-8x+4}{x^2-3x+2}}$.

9. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{-\operatorname{sen} x} + \sqrt{16-x^2}$.

10. Prueba las igualdades:

$$\cos a = 4\cos^3(a/3) - 3\cos(a/3) = 2\cos^2(a/2) - 1.$$

Usando que $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, deduce el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/8)$.

11. Dado un número entero $n \in \mathbb{Z}$, justifica que la función $f : [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, es inyectiva y expresa la inversa de f por medio de la función arcoseno. Representa gráficamente la función $h(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ para $x \in [-3\pi + \pi/2, 3\pi + \pi/2]$.

12. Prueba las igualdades siguientes.

$$\begin{aligned}
\cos(\operatorname{arc\,tg} x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\tan(\operatorname{arc\,sen} x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[\\
\arccos x + \operatorname{arc\,sen} x &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1] \\
\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

13. *a*) Prueba las igualdades:

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}; \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}.$$

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$ y $a \neq -1$. Definamos

$$\vartheta = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a+1}$$

Prueba que ϑ es el único número que verifica que $-\pi < \vartheta < \pi$, $\cos\vartheta = a$ y $\operatorname{sen}\vartheta = b$.

14. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

15. Justifica, usando las propiedades de la función exponencial, que la función $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de h.

16. Dado $x \geqslant 1$, prueba que hay un único $t \geqslant 0$ tal que $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = x$.

17. Dado un número $x \neq 0$, calcula un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$.